Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Développements :

Densité des fonctions continues nulle part dérivables, Théorème de Grothendieck.

Bibliographie :

Saint Raymond, Albert, Queffelec, Gourdon, Briane et Pages, Rouvière, Berthelin, ZQ, Hirsch-Lacombe.

Rapport du jury 2016 :

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans R ou C mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Rappelons ici que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème de Cauchy-Lipschitz ou le théorème du point fixe des applications contractantes. On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée ; elles sont nombreuses. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est délicate.

Rapport du jury 2017 :

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans R ou C mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $l^p(\mathbb{N})$ fournissent déjà de beaux exemples). On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz. On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée ; elles sont nombreuses. Le jury met en garde sur le caractère délicat de la démonstration détaillée, souvent tentée, rarement réussie, de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point.

Remarque 1. *(X, d) est un espace métrique.*

1 Suites de Cauchy et espaces complets

1.1 Suites de Cauchy

Définition 2 (Albert p88)**.** *[Dolecki p90] Suite de Cauchy.*

Proposition 3 (Albert p88)**.** *[Dolecki p90] Toute suite convergente est de Cauchy.*

Contre exemple 4 (Albert p88)**.** *[Pommellet] $\sqrt{2}$ est limite d'une suite de rationnels, suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.*
$\sum 1/n!$.

Proposition 5 (Saint Raymond)**.** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 6 (Albert p89)**.** *Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence a converge vers a.*

Proposition 7 (Albert p89)**.** *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.*

1.2 Espaces complets

Définition 8 (Albert p88)**.** *Espace complet.*

Exemple 9 (Albert p88)**.** *$\mathbb{R}$ est complet. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*

Contre exemple 10 (Queffelec Topologie p180)**.** *$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet mais pas complet avec la distance $d(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$. La complétude n'est donc pas une notion topologique.*

1.3 Critères de complétude et propriétés

Proposition 11 (Albert p89)**.** *[Gourdon p20] Tout fermé de (X, d) complet est complet pour d. Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*

Proposition 12 (Albert p89)**.** *Tout espace métrique compact est complet.*

Proposition 13 (Albert p90)**.** *Un produit d'espaces complets est complet.*

Application 14 (Albert p90)**.** *$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Tout evn de dimension finie est complet.*

Application 15 (Queffelec topologie p183)**.** *Un sev de dimension finie d'un evn est fermé.*

Proposition 16 (Queffelec topologie p181)**.** *X est complet si et seulement si il vérifie la propriété des fermés emboîtés.*

Proposition 17 (Gourdon)**.** *Critère de Cauchy pour les fonctions.*

2 Exemples dans les espaces de Banach

Définition 18 (Albert p88)**.** *Espace de Banach.*

Exemple 19 (Albert p88)**.** *Si X est un espace métrique et F est un Banach, $(C_b^0(X,F), ||\cdot||_\infty)$ est un Banach. Si de plus X est compact, alors $(C^0(X,F), ||\cdot||_\infty)$ est lui-aussi un Banach.*

Application 20. *Théorème d'Ascoli.*

Proposition 21. *Les espaces l^p sont complets.*

Exemple 22 (Saint Raymond)**.** *$c_0(\mathbb{N})$ est complet pour la norme infinie.*

Contre exemple 23. *$c_c(\mathbb{N})$ n'est pas complet car pas fermé dans l^p.*

Exemple 24 (FGN analyse 3 p131)**.** *[Pommellet p71] L'espace des fonctions lipchitziennes n'est pas complet pour la norme uniforme mais l'est pour la norme lipschitz.*

Exemple 25 (Albert p91)**.** *Pour E,F des evn et F un Banach, $(L_c(E,F), ||\cdot||_\infty)$ est un Banach. Ainsi, le dual topologique d'un Banach E, $E' = L_c(K,E)$, est un espace de Banach.*

Proposition 26 (Gourdon p52)**.** *Un evn est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Application 27 (Gourdon p49)**.** *Soit E algèbre de Banach dont la norme est sous-multiplicative. Alors, pour tout u tel que $||u|| < 1$, $1-u$ est inversible d'inverse ...*

De plus, $exp(u) = \sum u^n/n!$. est bien définie.

$GL(E)$ est ouvert dans $L(E)$.

Proposition 28 (Briane)**.** *L^p est un evn.*

Théorème 29 (Briane)**.** *Théorème de Riez Fischer. Les L^p sont complets.*

Contre exemple 30. *$(C([0,1]), ||\cdot||_1)$ n'est pas complet mais $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ l'est.*

3 Utilisation de la notion de complétude

3.1 Théorèmes de prolongement

Proposition 31 (Albert p94)**.** *[Pommelet p49] Théorème de prolongement des applications uniformément continues.*

Application 32 (Albert p95)**.** *[Pommellet p49][Hirsh Lacombe p19] Pour $[a,b]$ un segment et f une fonction étagée sur $[a,b]$, on peut définir l'intégrale de Riemann de f comme $\lim(\sum_k f(k/n)$. Or, cette application est uniformément continue pour la norme uniforme, ce qui permet de l'étendre à l'ensemble des fonctions réglées qui est l'espace des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions étagées. En particulier, $C^0([a,b])$ est un ensemble de fonctions étagées. On a alors défini l'intégrale de Riemann pour les fontions réglées, dont les fonctions continues sur un segment.*

Application 33. *Inégalité de Hardy.*

Théorème 34. *Théorème de Fourier Plancherel*

Définition 35. *Transformée de Fourier sur L^1.*

Proposition 36. *$F(f)$ est bien définie et $\in C_0^0$.*

Théorème 37 (Rudin, Faraut)**.** *Théorème de Fourier Plancherel.*

En notant $P(f) := 1/\sqrt{2\pi}F(f)$, on trouve alors que $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$, $||P(f)||_2 = ||f||_2$. Ainsi, P est une isométrie linéaire de $L^1 \cup L^2 \to L^2$, et se prolonge en une isométrie linéaire à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier. On peut ainsi prolonger la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple 38 (Candel)**.** *Calcul d'une transformée de Fourier dans L^2. Intégrale du sinc.*

3.2 Théorème de point fixe de Picart

Théorème 39 (Rouvière p147)**.** *Théorème du point fixe de Picard.*

Contre exemple 40 (Rouvière p148)**.**

Remarque 41. *Le théorème est aussi vrai si et seulement si il existe un n tq $f \circ .. \circ f$ est k-Lipschitzienne*

Application 42 (Berthelin)**.** *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Application 43. *Pour $\phi(x) = x - cf(x)$, $c \neq 0$, on a $\phi(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$. On peut alors faire varier c et l'intervalle I pour essayer de rendre ϕ k-Lipschitzienne afin de pouvoir approximer son point fixe, et ainsi approximer un zéro de f.*

Application 44 (Rouvière p222)**.** *Théorème d'inversion locale.*

3.3 Théorème de Baire et applications dans les espaces de Banach

Théorème 45 (Gourdon p397)**.** *Théorème de Baire. (Avec les ouverts et les fermés.)*

Application 46 (Gourdon p399)**.** *Un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet.*

Exemple 47. *$\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet.*

Application 48 (ZQ)**.** *Les applications continues nulle part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues.*

Théorème 49 (Gourdon p404)**.** *Théorème de Banach Steinhaus.*

Application 50. *La limite simple d'applications linéaires continues est linéaire continue.*

Application 51. *L'existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

Théorème 52 (Gourdon p403)**.** *Théorème de l'application ouverte. Théorème de Banach.*

Proposition 53. *Théorème du graphe fermé.*

Application 54 (Candelpergher)**.** *La transformée de Fourier n'est pas surjective de L^1 dans L^1.*

Application 55. *Les sous espaces vectoriels fermé de $C^0([0,1])$ inclus dans $C^1([0,1])$ sont de dimension finie.*

4 Espaces de Hilbert

Remarque 56. *Les espaces de dimension finie sont très maniables mais beaucoup de leurs propriétés intéressantes ne sont plus vraies en dimension infinie. Les propriétés topologiques des espaces de Hilbert en font des espaces de dimension infinie très souples, comme nous allons le voir.*

Définition 57 (Albert p88)**.** *Espace Hilbertien. (Espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.)*

Exemple 58 (Hirsch Lacombe p88)**.** $\mathbb{R}^n$*, L^2 et l^2 sont des Hilberts.*

Théorème 59 (Hirsch p91)**.** *Théorème de projection sur un convexe fermé non vide.*

Application 60. *Polynômes de meilleure approximation.*

Corollaire 61 (Hirsch p93)**.** *Décomposition de E en somme directe. (Théorème du supplémentaire orthogonal).*

Application 62 (Hirsch p93)**.** *F est dense dans E si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Théorème 63 (Hirsch p96)**.** *Théorème de représentation de Riesz.*

Application 64. *Optimisation et Banach Alaoglu.*

Théorème 65. *Théorème de Grothendieck.*